Anelli di ordine 4

Sono anelli di ordine 4

- $\mathbb{Z}_4$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

non isomorfi, in quanto non sono isomorfi i loro gruppi addiitivi.
A nessuno dei due è isomorfo l'anello

- $\mathbb{Z}_2[X] \, / \, \left(X^2 + X + \overline{1}\right)$,

in quanto quest'ultimo è un campo, mentre nessuno dei due precedenti è integro.

Non è integro nemmeno l'anello

- $\mathbb{Z}_2[X] \, / \, \left(X^2 + \overline{1}\right)$,

poiché il polinomio $X^2 + \overline{1} = (X + \overline{1})^2$ è riducibile in $\mathbb{Z}_2[X]$. Ogni elemento è simmetrico di sé stesso, quindi il suo gruppo additivo non è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Tuttavia, questo anello non è isomorfo nemmeno a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, perché non sono isomorfi i gruppi delle unità

$$\mathcal{U}\left(\mathbb{Z}_2[X] \, / \, \left(X^2 + \overline{1}\right)\right) = \{[\overline{1}], \, [X]\}$$
$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(\overline{1}, \overline{1})\}.$$

Abbiamo così individuato quattro strutture distinte di anello di ordine 4, tutte commutative e unitarie. Altre due strutture di anello di ordine 4 sono

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, dotato del prodotto banale
- $\mathbb{Z}_4$, dotato del prodotto banale.

Questi ultimi due anelli non sono tra loro isomorfi (per via delle diverse strutture additive), né isomorfi ad alcuno degli anelli precedenti (per via delle diverse strutture moltiplicative). Sono commutativi, ma evidentemente non unitari.
Un altro anello commutativo e non unitario è il seguente sottoanello di $\mathbb{Z}_8$:

- $\{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$

Ai sette anelli commutativi finora determinati se ne aggiunge un altro, non unitario né commutativo, costruito come segue.

- Si considera il sottoinsieme A di $M_2(\mathbb{Z}_2)$ formato da

$$0 = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad c = a+b = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Questo è evidentemente chiuso rispetto alla somma di matrici (ed è un sottogruppo del gruppo additivo di $M_2(\mathbb{Z}_2)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Inoltre è chiuso rispetto al prodotto righe per colonne, in quanto

$a^2 = a, \quad ab = 0, \quad ba = b, \quad b^2 = 0$, da cui $ac = a,\ ca = c,\ bc = b,\ cb = 0,\ c^2 = c.$

Quindi A è un sottoanello di $M_2(\mathbb{Z}_2)$. Abbiamo anche appena constatato l'inesistenza di un elemento neutro del prodotto e la mancata commutatività del prodotto. Si noti che la moltiplicazione a destra per b annulla ogni elemento di A. Quindi, nella tavola del prodotto di A è nulla la colonna relativa a b.

- Un ulteriore anello di ordine 4 è anche A', l'insieme formato dalle trasposte ($'$) degli elementi di A: è anch'esso un sottoanello di $M_2(\mathbb{Z}_2)$ in quanto, per ogni $x, y \in M_2(\mathbb{Z}_2)$,

$x' + y' = (x+y)'$
$x' \cdot y' = (y \cdot x)'$

Quindi, per ogni $x, y \in A$, $x' + y' \in A'$, $x' \cdot y' \in A'$, poiché entrambi gli elementi sono trasposte di elementi di A (che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto). L'anello A' è a sua volta non unitario e non commutativo, ma non è isomorfo ad A: nella sua tavola del prodotto non c'è una colonna nulla (c'è invece una riga nulla, corrispondente a b').

Abbiamo sinora elencato 9 anelli di ordine 4 a due a due non isomorfi. Complessivamente, i modelli sono 11. All'elenco vanno aggiunti i seguenti due anelli:

- il prodotto diretto di $\mathbb{Z}_2$ e dell'anello su due elementi avente prodotto banale (si ricordi che questi sono, a meno di isomorfismi, gli unici due anelli di ordine 2); questo è un anello commutativo, non unitario, in cui esiste uno ed un solo prodotto non nullo (l'elemento $([1]_2, 0)$), e in questa proprietà l'anello si distingue da tutti i precedenti;
- il sottoanello di $M_3(\mathbb{Z}_2)$ formato dalle matrici

$$0 = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad c = a + b = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Qui si hanno le seguenti relazioni:

$$a^2 = b,\ b^2 = 0,\ ab = ba = 0, \quad \text{da cui} \quad c^2 = b,\ ac = ca = b,\ \ bc = cb = 0.$$

Anche in questo caso esiste un unico prodotto non nullo, ossia b, ma questo elemento annulla ogni elemento a destra e a sinistra, il che non avviene nel caso precedente. Questo anello è commutativo, ma, evidentemente, non unitario. Ecco la tavola del prodotto:

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	b	0	b
b	0	0	0	0
c	0	b	0	b